Geometria ESA

Mariolina Angelone
Giuseppe Savarese

Definizioni

- Si definisce esaG una figura piana composta da n esagoni regolari ciascuno con almeno un lato in comune con un altro esagono e che non lasci spazi vuoti circondati da esagoni.
- Si definisce vertice V di un esaG il vertice di un esagono, appartenente ad un esaG, che non sia in comune con un altro esagono.

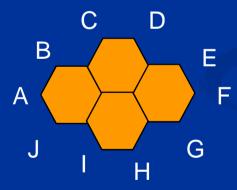


Fig. 1 - Esempio di esaG per n = 4 con 10 vertici A B C D E F G H I J

Definizioni

Si definisce esa+ un esaG i cui vertici V giacciono sui lati di un esagono regolare, detto esagono iscrivente.

Ogni lato dell'esagono iscrivente contiene h vertici V. Si definisce ordine dell'esa+ il numero h.

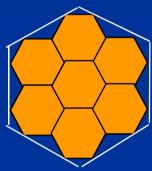


Fig. 2 - esa + con n = 7 di ordine h = 2

- Si definisce dimensione d dell'esa+ il numero massimo di esagoni i cui centri sono allineati su una stessa retta. Nel caso di fig. 2, d = 3.
- n, d e h sono tutti interi positivi.
- Per h = 1 l'esa+ collassa in un esagono.

Formule

Per ogni esa+ sussistono semplici formule che legano n, h, d.

$$d = 2h - 1 \tag{2}$$

$$\sum_{h=1, k} n_h = k^3 \tag{4}$$

dove k è un intero positivo e n_h è il numero di esagoni di un esa+ di ordine h



- Chiamiamo esa un esa+ non collassato.
 Per un esa è sempre h > 1
- Un esa è univocamente determinato dal suo ordine h o dal numero n degli esagoni che lo compongono e si indica con "esa n" oppure "esa ordine h".

Fig. 3 - esa ordine 3 oppure esa 19

Tabella A

Le formule (1) ... (5) si ricavano facilmente dall'esame della tabella A ottenuta sperimentalmente.

h	n (1), (3)	d (2)	sommatoria (4)	differenza (5)		
1	1	1	1	6		
2	7	3	8	12		
3	19	5	27	18		
4	37	7	64	24		
5	61	9	125	30		
6	91	11	216	36		
7	127	13	343	42		
8	169	15	512	48		
9	217	17	729	54		
10	271	19	1000	60		
11	331	21	1331	66		
12	397	23	1728	72		

Teoremi generali

■ Teorema A - Nel passare da un esa di ordine h a quello di ordine h + 1, d aumenta di 2.

Dalla (2) si ha
$$d_h = 2h - 1$$
; $d_{h+1} = 2(h + 1) - 1 = 2h + 1$
quindi $d_{h+1} - d_h = 2h + 1 - (2h - 1) = 2$.

Teorema B - Se h è pari, il numero n-1 è divisibile per d-1 mentre per h dispari n-1 è divisibile per d+1.

Combinando la (1) con la (2) si ha:

$$n-1 = 3 (d + 1) (d - 1) / 4$$

dalla (2) si ha d + 1 = 2h . Dunque, se h è pari, d + 1 è divisibile per 4, il rapporto (d + 1) / 4 è intero, quindi n - 1 è divisibile per d - 1

Sottraendo 1 ai due membri della (2) si ha: d - 1 = 2(h - 1)

Se h è dispari, h-1 è pari, quindi d-1 è divisibile per 4, il rapporto (d-1) / 4 è intero, quindi n-1 è divisibile per d+1

Teoremi generali

■ Teorema C – Se h è dispari, il numero $d_h + 1$ per cui è divisibile $n_h - 1$ è anche divisore di di $n_{h+1} - 1$ dell'esa successivo.

Infatti
$$n_{h+1}-1$$
 è pari quindi divisibile per $d_{h+1}-1$. Essendo $d_{h+1}-d_h=2$, $d_{h+1}-1=d_h+2-1$ quindi $d_{h+1}-1=d_h+1$

Teorema D – Se h è pari, il rapporto $(n_h - 1) / (d_h - 1)$ è eguale al rapporto $(n_{h+1} - 1) / (d_{h+1} + 1)$ dell'esa successivo.

Infatti
$$(n_h - 1) / (d_h - 1) = 3 (d_h + 1) / 4$$

 $(n_{h+1} - 1) / (d_{h+1} + 1) = 3 (d_{h+1} - 1) / 4$
essendo $d_{h+1} = 2 + d_h$ allora $3(d_{h+1} - 1) / 4 = 3(2 + d_h - 1) / 4 = 3 (d_h + 1) / 4$

■ Teorema E – Il resto del rapporto n/6 è sempre 0.166666

$$n / 6 = h (h - 1)/2 + 1/6$$

Dei due numeri successivi h-1 e h almeno uno è pari. Quindi h (h-1)/2 è un numero intero ed anche la parte intera di n / 6 . Il resto è 1 / 6=0.166666 .

Teoremi generali

Teorema F – Per h pari, n-1 è divisibile per il numero o di esagoni della corona dell'esa; per h dispari, è divisibile per o+6.

Gli esagoni o della corona dell'esa sono quelli che hanno almeno un vertice giacente sull'esagono iscrivente. Dalla (5) si ha:

o = 6(h - 1). Ricavando dalla (1) n - 1 e dividendo per o i due membri:

$$(n-1) / o = 3h (h-1)/6 (h-1) = h/2$$
.

Se h è pari, h/2 è intero, quindi n-1 è divisibile per o.

Ricavando dalla (1) n - 1 dividendo per o + 6 i due membri:

$$(n-1) / (o + 6) = 3h (h-1)/[6 (h-1) + 6] = 3h (h-1)/6 h = (h-1)/2$$

Se h è dispari, h - 1 è pari quindi n - 1 è divisibile per o + 6.

Si noti che il risultato delle due divisioni passando da un esa di ordine h pari al successivo esa di ordine h + 1 è lo stesso ed è eguale a h / 2.

■ Teorema G – Per h pari, n - 1 è divisibile per d - 1; per h dispari, per d + 1.

Dividendo i due membri della (1) per d - 1 e adoperando la (2):

$$(n-1)/(d-1) = 3h(h-1)/(2h-2) = 3 h/2$$
. Se h è pari, h/2 è intero, n – 1 è divisibile per d – 1.

Dividendo i due membri della (1) per d + 1 e adoperando la (2):

$$(n-1)/(d+1) = 3h(h-1)/2h = 3(h-1)/2$$
. Se h è dispari, $h-1$ è pari, $(h-1)/2$ è intero, $n-1$ è divisibile per $d-1$.

Definizioni

Un esa può sempre essere ruotato in un piano di assi cartesiani ortogonali x-y in modo che l'esagono iscrivente abbia due lati paralleli all'asse y. In tal caso l'esa si dice normalizzato. D'ora in avanti considereremo sempre esa normalizzati.

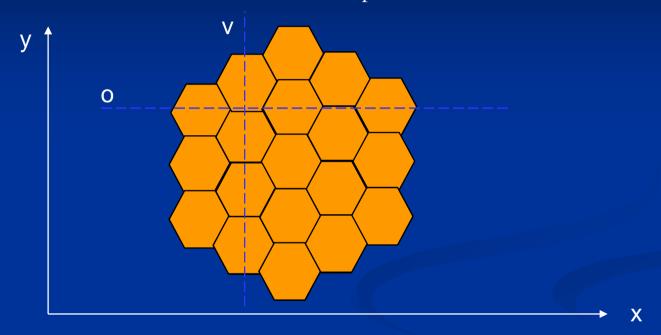


Fig. 4 – Allineamenti o e v di esagoni di un Esa

- Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta o paralella all'asse x sono definiti "allineati o"
- Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta v paralella all'asse y sono definiti "allineati v"

Definizioni

Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta inclinata di 60 gradi rispetto all'asse x sono definiti "allineati d₁"

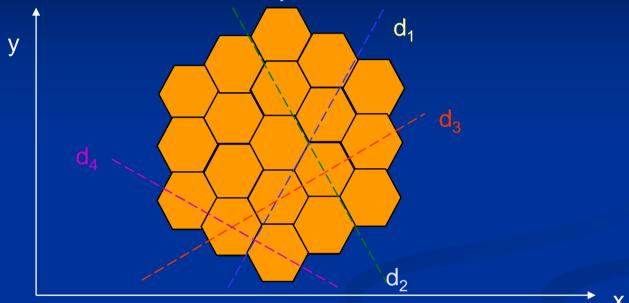


Fig. 5 – Esempi di allineamenti d₁, d₂, d₃ e d₄

- Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta inclinata di 120 gradi rispetto all'asse x sono definiti "allineati d₂"
- Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta inclinata di 30 gradi rispetto all'asse x sono definiti "allineati d₃"
- Due o più esagoni di un esa i cui centri giacciono su una retta inclinata di 150 gradi rispetto all'asse x sono definiti "allineati d₄"

Osservazione

■ In un esa esistono molteplici allineamenti dello stesso tipo.

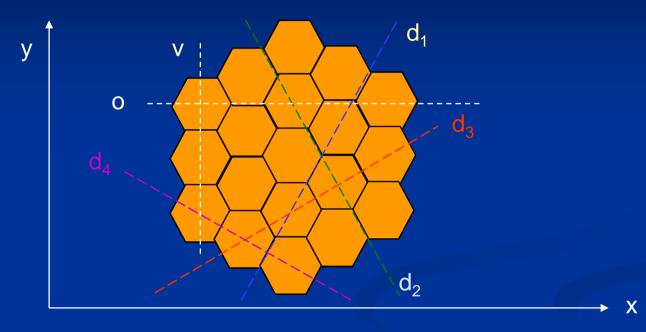


Fig. 6 – Esempi di allineamenti o, v, d₁, d₂, d₃ e d₄

- In Fig. 6, ci sono:
 - 7 allineamenti o
 - 5 allineamenti v
 - 7 allineamenti d₁

- 7 allineamenti d₂
- 5 allineamenti d₃
- 5 allineamenti d₄

Definizioni

Dato un esa di n esagoni ogni gruppo di 3 numeri interi positivi c, r, b tali che:

$$n = c r + b$$
 dove $b = 0$ oppure $b = 1$ (6)
 $c / r \ge 1$ (7)
si chiama "terna" dell' esa e si indica con (c, r, b) .

- Se al posto della (7) viene verificata la condizione più restrittiva c / $r > 1.618033989... = \Phi$ (7') la terna si chiama "trio" dell' esa.
- Un trio si dice "banale" se r = 1.

Considerazioni

- Per ottenere tutte le terne possibili di un esa, basta seguire la seguente procedura.
 - Scomporre n in fattori primi
 - Aggiungere ai fattori primi il numero 1
 - Moltiplicare i fattori primi e 1 tra di loro per ottenere tutte le coppie possibili di prodotti c, r essendo c ≥ r
 - Si ottengono così tutte le terne (c, r, 0)
 - Scomporre n-1 in fattori primi
 - Aggiungere ai fattori primi il numero 1
 - Moltiplicare i fattori primi e 1 tra di loro per ottenere tutte le coppie possibili di prodotti c, r essendo $c \ge r$
 - Si ottengono così tutte le terne (c, r, 1)
- Esempio: esa 19
 - La scomposizione di 19 in fattori primi e l'aggiunta di 1 fornisce: 19, 1
 - L'unica coppia c, r possibile è 19, 1
 - La terna (in questo caso il trio banale) che si ricava è (19, 1, 0)
 - La scomposizione in fattori primi di 19 -1 = 18 e l'aggiunta di 1 fornisce 2, 3, 3, 1
 - Le coppie possibili sono 6, 3 9, 2 18, 1
 - Le terne, anzi i trii in questi casi, sono: (6, 3, 1) (9, 2, 1) e il trio banale (18, 1, 1)
- Se n è un numero primo, con b = 0 esiste solo il trio banale (c, 1, 0).

Considerazioni

- Dalla (1) si ricava che n 1 è sempre divisibile per 3. Dalla (3) si ricava che n 1 è sempre pari e quindi divisibile per 2. Quindi 2, 3 e 6 sono sempre presenti, come c oppure come r, in qualsiasi terna.
- La (1) si può anche scrivere:
 - n 1 = 3h (h 1)da cui n - 1 = 6h (h - 1)/2

Pertanto esiste un trio del tipo (h (h – 1)/2, 6, 1) non appena h (h – 1)/2 > 6, quindi per h > 4. Si noti che h (h – 1)/2 è sempre intero, essendo certamente pari uno dei due numeri h oppure h - 1.

Nel passare da un esa di ordine h a quello di ordine h + 1, i colori c di un trio con r = 6 aumentano di h . Infatti, [(h + 1) h / 2] - [h (h - 1) / 2] = h.

Soluzione

- Ad ogni esagono di un esa è sempre possibile associare un simbolo, per esempio un colore.
- A partire da ogni terna o trio e convenendo che se b = 1 l'esagono centrale dell'esa viene colorato in nero, è sempre possibile colorare tutti gli esagoni restanti dell'esa adoperando c colori diversi dal nero ognuno ripetuto r volte. Il numero r assume il significato di "ripetizioni" di uno stesso colore. Una colorazione di questo tipo si definisce "configurazione".
- Una configurazione è una "soluzione" se in nessun allineamento del tipo o, v, d_1 , d_2 , d_3 , d_4 risultano esagoni dello stesso colore. L'esa così configurato si dice "risolto".
- Al simbolo → si attribuisce il significato "genera". (6, 3, 1) → soluzione, significa che l'esa 19 può essere risolto a partire dal trio (6, 3, 1).

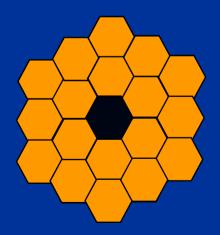


Fig. 7 - esa 19 ovvero esa ordine 3

- La soluzione di un esa generata da un trio banale è "banale" e ha tutti gli esagoni di colore diverso. Per h = 3 i trii banali sono:
 - (19, 1, 0) (18, 1, 1)
- A partire da un esa risolto, si considerano equivalenti tutte le soluzioni ottenute ruotando l'esa di 60° oppure scambiando i colori di due gruppi di r esagoni.

Esempio di soluzione



Fig. 8 – esa 91 dove $(13, 7, 0) \rightarrow$ soluzione

Definizioni

- Un trio (c, r, b) con r = h viene detto "speciale". L'eventuale soluzione generata da tale trio e' detta anch'essa "speciale".
- Un trio (c, r, b) con r = h − 1 viene detto "sottospeciale".
 L'eventuale soluzione generata da tale trio e' detta anch'essa "sottospeciale".

Teorema

■ Teorema 1 - Una soluzione speciale ha sempre un esagono nero al centro.

Supponiamo b = 0. Ponendo nella (6) r = h e b = 0 si ha n = h c . Sostituendo nella (1):

h c = 3h (h - 1) + 1 da cui, isolando c, si ottiene:

c = 3 (h - 1) + 1/h che, essendo h intero > 1, è un numero frazionario, contro la definizione che vuole c intero.

Quindi b = 1 cvd

I colori che servono per una soluzione speciale si ottengono sostituendo la (6) con r = h e b = 1 nella (1). Si ottiene:

$$h c + 1 = 3h (h - 1) + 1$$

da cui, isolando c si ricava:

$$c = 3(h - 1)$$

(8)

Teorema

Teorema 2 - Una soluzione sottospeciale ha sempre un esagono nero al centro.

```
Supponiamo b = 0. Ponendo nella (6) r = h-1 e b = 0 si ha n = (h-1) c . Sostituendo nella (1): (h-1) c = 3h (h-1) + 1 da cui, isolando c, si ottiene: c = 3h + 1/(h-1) che, essendo h intero > 1, è un numero frazionario, contro la definizione che vuole c intero. Quindi b = 1 cvd
```

I colori che servono per una soluzione sottospeciale si ottengono sostituendo la (6) nella (1) con r = h - 1 e b = 1. Si ottiene:

$$c (h-1) + 1 = 3h (h-1) + 1$$

da cui, semplificando, si ricava:

$$c = 3h$$

(9)

Teoremi

■ Teorema 3 – Per ogni esa esiste sempre un trio speciale.

```
Gli esagoni colorati diversamente dal nero, dalla (1) sono: n-1=3h\ (h-1). Essendo b=1 e r=h, la (6) diventa n=ch+1 quindi c=(n-1)/h. Ora (n-1)/h=3h-3 Essendo 3h-3 un intero positivo, anche (n-1)/h è un intero positivo. Dalla (7) si ha c \ge h. Essendo 3h-3 \ge h > \Phi la (7') è verificata. Quindi il trio speciale è: ((n-1)/h, h, 1)) cvd
```

■ Teorema 4 – Per ogni esa esiste sempre un trio sottospeciale.

```
Dalla (1) si ha: n-1=3h\ (h-1) dividendo entrambi i membri per h-1 si ottiene: (n-1)/(h-1)=3h . Essendo b=1 e r=h-1 la (6) diventa n=c\ (h-1)+1 . Quindi: c=(n-1)/(h-1)=3h Essendo 3h un intero positivo, anche (n-1)/(h-1) è un intero positivo. Dato che c/r=3h/(h-1)\geq 3>\Phi, la (7') è verificata. Quindi il trio sottospeciale è: ((n-1)/(h-1),h-1,1)) cvd
```

Teorema

■ Teorema 5 − Per passare dal trio speciale dell'esa ordine h a quello ordine h+1 occorre aggiungere 3 colori.

Siano c_1 e c_2 i colori dei trii speciali nei due esa di ordine h e h+1. Dalla (8) si ottiene:

```
c_1 = 3h - 3
c_2 = 3(h+1) - 3
quindi
c_2 = 3h
pertanto c_2 - c_1 = 3h - (3h - 3) = 3 cvd
```

Teorema

■ Teorema 6 - Per passare dal trio dell'esa sottospeciale ordine h a quello ordine h+1 occorre aggiungere 3 colori.

Siano c_1 e c_2 i colori dei trii sottospeciali nei due esa di ordine h e h+1. dalla (9) si ricava:

```
c_1 = 3h

c_2 = 3(h+1)

quindi

c_2 = 3h + 3

pertanto c_2 - c_1 = 3h + 3 - 3h = 3 cvd
```

Fiore

L' esa 7 si definisce "fiore".



Fig. 9– Fiore

Per un fiore, esistono solo due soluzioni, provenienti dai due trii banali:

- (6, 1, 1)
- (7, 1, 0)

che entrambe consistono nel colorare i 7 esagoni ognuno con un colore diverso.

Teorema

Teorema 7 - I fiori contenuti in un esa ordine h+1 sono pari agli esagoni n_h dell'esa ordine h

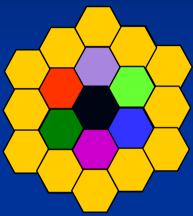


Fig. 10 – Esa di ordine h = 3 con al centro un esa di ordine h = 2

Per passare da un esa ordine h a quello ordine h + 1 occorre aggiungere intorno all'esa ordine h una corona di esagoni periferici: tanti quanti sono dati dalla (5). Ogni esagono periferico dell'esa ordine h diventa l'esagono centrale di un fiore dell'esa ordine h + 1. Per ottenere tutti i fiori dell'esa ordine h + 1 a questi nuovi fiori occorre aggiungere i fiori dell'esa ordine h, che sono tanti quanti sono gli esagoni che non sono in periferia dell'esa ordine h. Essendo gli esagoni dell'esa ordine h dati dalla somma di quelli in periferia + quelli non periferici, i fiori dell'esa di ordine h + 1 si sono quindi in tutto pari agli esagoni dell'esa di ordine h.

Teorema

Teorema 8 - Tutti gli esagoni di un qualsiasi fiore in un esa risolto hanno colore diverso.



Fig. 11 – Soluzione di un fiore

Due esagoni qualsiasi di un fiore fanno necessariamente parte di uno dei 6 allineamenti. Se due esagoni fossero di eguale colore, in uno dei 6 allineamenti nell'esa ci sarebbero due colori eguali, contro l'ipotesi che l'esa è risolto, cvd.

Tabella B

Stato della sperimentazione su tutte le terne e i trii non banali per esa fino a ordine 11

n	h	fattori primi	terne e trii (c, r, b)									
1	1	1										
7	2	2,3										
19	3	2,3,3	6,3,1	9,2,1								
37	4	2,2,3,3	12,3,1	9,4,1	6,6,1	18,2,1						
61	5	2,2,3,5	15,4,1	10,6,1	12,5,1	30,2,1	20,3,1					
91	6	13,7 - 2,3,3,5	15,6,1	10,9,1	45,2,1	18,5,1	30,3,1	13,7,0				
127	7	2,3,3,7	21,6,1	14,9,1	63,2,1	18,7,1	42,3,1					
169	8	13,13 - 2,2,2,3,7	13,13,0	42,4,1	21,8,1	24,7,1	84,2,1	28,6,1	14,12,1	56,3,1		
217	9	31,7 - 2,2,2,3,3,3	54,4,1	36,6,1	24,9,1	27,8,1	18,12,1	81,8,1	72,3,1	108,2,1	31,7,0	
271	10	2,3,3,3,5	45,6,1	30,9,1	18,15,1	27,10,1	45,6,1	54,5,1	70,3,1	135,2,1		
331	11	2,3,5,11	165,2,1	22,15,1	55,6,1	30,11,1	66,5,1					
c, r, b	1	terna -> nessuna soluzione		c, r, b terna -> soluzione cercata ma non trovata								
c, r, b	t	trio 🗲 soluzione sperimentata			c, r, b trio → soluzione non sperimentata							

Osservazioni

- La Tabella B riassume lo stato della ricerca di soluzioni sperimentali a partire da tutte le terne e i trii degli esa fino all'ordine 11.
- La terna (6,6,1) dell'esa ordine 4 non può generare soluzione per il Teorema 8. Non ci sono abbastanza colori per colorare i fiori che non contengono l'esagono nero centrale.
- La soluzione dalla terna (13,13,0) è impossibile perché nell'esa ordine 8 si ha d = 15. Essendo c < d non ci sono abbastanza colori per colorare gli allineamenti più lunghi.
- I trii speciali e sottospeciali generano sempre una soluzione. Si verifica che: (c, h, 1) → soluzione; (c, h-1, 1) → soluzione.
- Più il rapporto c/r è basso, più è difficile trovare una soluzione dell'esa.
- Per ogni h, dove esista una soluzione generata da un trio con un dato rapporto c/r, si è ipotizzato che esista sempre almeno una soluzione generata dai trii con rapporto c/r superiore.
- Per le terne a partire dalle quali non si è trovata una soluzione, non è però stato dimostrato che tale soluzione non esista.
- Il valore c/r più basso del trio che genera una soluzione è quello del trio (10,6,1). In tale caso, c/r = 1.66666
- Il valore c/r più alto di una terna di cui non si è trovata una soluzione è quello della terna (14,9,1). In tal caso, si ha c/r = 1.55555
- La media aritmetica dei due rapporti è 1.61111.
- Il numero Φ = 1.61803 nella (7') è stato scelto con il solo criterio di essere il numero notevole che più si avvicina a 1.61111 .

Congettura

- Congettura 9 Solo un trio → una soluzione.
- La congettura 9 e' stata verificata sperimentalmente per tutti gli esa fino all'ordine 11.
- Se la congettura fosse dimostrata vera, occorrerebbe dimostrare se "solo un trio" sia condizione necessaria o sufficiente o necessaria e sufficiente per generare una soluzione.
- Nella sfida di dimostrare vera la congettura 9, è accettabile sostituire alla (7') una condizione (7'') da definire.

Note

- La geometria Esa si può inquadrare nell'ambito piu' generale di quella parte della geometria che ha per oggetto figure geometriche:
 - composte da figure geometriche di cui ciascuna ha in comune con un'altra almeno un elemento delimitatore
 - che siano iscrivibili in un'altra figura geometrica.
- Particolare interesse rivestono le figure geometriche regolari iscrivibili in figure geometriche regolari.

Esempi notevoli

- Il cubo di Rubik, figura iscrivibile in un cubo composta da 26 cubi ognuno con almeno tre facce in comune con un altro cubo.
- La scacchiera del gioco dell'Hex, detto anche gioco di Einstein, figura iscrivibile in un rombo composta da 121 esagoni ciascuno con almeno due lati in comune con altri esagoni.
- La scacchiera del gioco degli scacchi, composta da 64 quadrati ciascuno con almeno due lati in comune con un altro quadrato e che si iscrive in un quadrato.
- Il Sudoku, composto nella sua forma classica da 9 scacchiere iscritte in un quadrato dove ogni scacchiera e' a sua volta composta da 9 quadrati iscritti in un quadrato.
- Il pallone da calcio e la struttura del fullerene, figura tridimensionale composta da pentagoni ed esagoni dove ogni esagono ha i lati in comune con altri esagoni o pentagoni e ogni pentagono ha i lati in comune con esagoni, e che si iscrive in una sfera.

JWST

- Dal sito della NASA: The James Webb Space Telescope (JWST) is a large, infrared-optimized space telescope, scheduled for launch in 2013. JWST will find the first galaxies that formed in the early Universe, connecting the Big Bang to our own Milky Way Galaxy. JWST will peer through dusty clouds to see stars forming planetary systems, connecting the Milky Way to our own Solar System. JWST's instruments will be designed to work primarily in the infrared range of the electromagnetic spectrum, with some capability in the visible range.
- Il telescopio JWST è composto da specchi esagonali con una struttura simile a un esa 19.



